Bernoulli-Kette und Binomialverteilung

Beispiel 1 Nach Untersuchungen tritt die Blutgruppe AB in Deutschland (ca. 82 Millionen Einwohner) mit einer relativen Häufigkeit von 5 % auf.

a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass unter 30 zufällig gewählten Deutschen mindestens einer die Blutgruppe AB hat?

b) In Deutschland werden 500 Personen zur Blutspende geworben. Keine von ihnen weiß, welche Blutgruppe sie hat, AB wird jedoch dringend benötigt. Da es schnell gehen muss, werden 200 der freiwilligen Blutspender zufällig ausgewählt.
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens einer davon die Blutgruppe AB hat?

c) Man möchte, dass mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,9 eine Person mit der Blutgruppe AB Blut spendet. Wie viele Spender braucht man, damit dieser Wunsch erfüllt ist? Untersuchen Sie dies mit `solve` im ClassPad. Wie ändert sich die Anzahl der benötigten Spender, wenn der Wunsch mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,98 erfüllt sein soll? Leiten Sie eine Lösungsgleichung her.

> **Hinweis.** Um sich Rechnungen zu ersparen, definieren Sie unter Main die folgende Funktion P mit zwei Variablen:
> `Define P(n,p)=1-(1-p)∧n`.

d) Zeichnen Sie einen 3-dimensionalen (3-d-) Graphen der Funktion P. Bestimmen Sie mit dem Cursor Orte, an denen die Wahrscheinlichkeit etwa 0,9 beträgt. Deuten Sie das Ergebnis.

> **Hinweis.** Zeichnen Sie Graphen der Funktion P mit $P(n,p) = 1-(1-p)^n$ dreidimensional mit den Variablen n und p unter 3d-Graphik und untersuchen Sie dort mithilfe des Cursors. Machen Sie sich die Grenzen der 3-d-Graphen klar.

e) Da der Stichprobenumfang gering ist, kann die Wahrscheinlichkeit p nur bis auf $\frac{1}{1000}$ genau abgeschätzt werden. Wie groß ist n zu wählen, damit $P(n,p) \geqslant 0{,}9$ ist? Untersuchen Sie dies auch am 3-d-Graphen.

f) Untersuchen Sie die Funktion P im 3-d-Graphen und rechnerisch auf Extremstellen. Erklären Sie das Ergebnis.

Beispiel 2 Gehen Sie weiterhin von den Voraussetzungen aus Beispiel 1 aus. Von 100 Spendern sollten mindestens zwei (drei, vier, ...) Spender die Blutgruppe AB haben. Die Ärzte wollen wissen, mit welcher Wahrscheinlichkeit dieser Fall eintritt. (Manche Personen spenden mehrfach Blut.)

a) Zunächst überlegen Sie sich, wie groß die Wahrscheinlichkeit ist, dass die ersten zwei (drei, vier, ...) der Spender die Blutgruppe AB haben, wohingegen die übrigen Spender eine andere Blutgruppe besitzen.

> **Hinweis.** Definieren Sie zur Lösung der Aufgabe die Zufallsgrößen
> X: „Anzahl hintereinander gefundener Personen mit Blutgruppe AB“ und
> X_k: „Der k-te Spender hat die Blutgruppe AB“.

b) Die Ärzte möchten wissen, wie groß die Wahrscheinlichkeit ist, unter den 100 Spendern genau zwei (drei, vier) Spender der Blutgruppe AB zu finden. Da die Blutgruppe erst bestimmt werden kann, wenn alle gespendet haben, kann die Blutgruppe AB an beliebigen Stellen aufgetreten sein. Wie groß ist jetzt die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses? Stellen Sie die Wahrscheinlichkeiten einer Blutspende der Blutgruppe AB in Abhängigkeit von der Anzahl an Spenden graphisch dar. Wie viele der 100 Spender haben mit der größten Wahrscheinlichkeit die Blutgruppe AB?

> **Hinweis.** Zur Berechnung lässt sich die Operation
> `Interaktiv` → `Verteilungfunktionen` → `Diskret` → `binomialPDf`
> unter Main verwenden. Sie besitzt die folgenden drei Variablen:
>
> x Anzahl der Spender mit Blutgruppe AB
>
> n Anzahl der Spender
>
> *pos* Wahrscheinlichkeit eines Spenders mit Blutgruppe AB

c) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass unter 100 Personen mindestens zwei (drei, ...) der Blutspender (($P(X \geqslant 2)$, $P(X \geqslant 3)$, ...) die Blutgruppe AB haben. Folgern Sie daraus eine allgemeine Form $P(X \geqslant k)$ für $1 \leqslant k \leqslant n-1$.

> **Hinweis.** Zur Berechnung lässt sich die Operation
> `Interaktiv` → `Verteilungfunktionen` → `Diskret` → `binomialCDf`
> unter Main verwenden. Sie besitzt die folgenden drei Variablen:
>
> Untere Mindestzahl der Spender mit Blutgruppe AB
>
> Obere Höchstzahl der Spender mit Blutgruppe AB
>
> n Anzahl der Spender
>
> *pos* Wahrscheinlichkeit eines Spenders mit Blutgruppe AB

d) Es werden $2\frac{1}{2}$ Liter Blut der Gruppe AB benötigt. Jede Person kann jedoch nur einen halben Liter spenden. Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird man die gewünschte Blutmenge von 20 Spendern erhalten? Wie groß müsste der Spenderumfang sein, um mit einer Wahrscheinlichkeit von $P(X \geqslant 5) = 0{,}75$ die ausreichende Menge an Blut der Gruppe AB zu bekommen?

Wie müsste sich der Spenderumfang bei einer Änderung der Wahrscheinlichkeit p verändern, damit die Wahrscheinlichkeit $P(X \geqslant 5)$ erhalten bleibt?

e) Es werden 100 Spender erwartet. Mit wie vielen Spendern der Blutgruppe AB kann gerechnet werden?

Lösung zu Beispiel 1. a) Die relative Häufigkeit der Blutgruppe AB ist $h = 0{,}05$. Wir benutzen sie als Wahrscheinlichkeit des Ereignisses, eine Person mit der Blutgruppe AB zu finden, d. h. $p = 0{,}05$, und definieren das Ereignis

X: „Anzahl hintereinander gefundener Personen mit Blutgruppe AB“

Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die zufällig gewählte Person nicht die Blutgruppe AB besitzt, ist gleich $(1-p) = 0{,}95$.

Das Ergebnis $X = 0$ bedeutet, dass von 30 zufällig gewählten Personen keine die Blutgruppe AB hat. Damit folgt

$$P(X = 0) = (1-p)^{30} = 0{,}95^{30} \approx 0{,}215.$$

$X \geqslant 1$ ist das Ereignis, dass mindestens eine von 30 Personen die Blutgruppe AB hat. Da es sich um das Gegenereignis von $X = 0$ handelt, folgt

$$P(X \geqslant 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - (1-p)^{30} \approx 0{,}785.$$

b) Nach der relativen Häufigkeit aus der Stichprobe haben 5 % der Spender die Blutgruppe AB. Analog zu Teil a) folgt $P(X \geqslant 1) = 1 - (1-p)^{500}$. Der Exponent ist so hoch, dass der ClassPad das Ergebnis auf 1 rundet. 200 Personen ist ein Anteil von $\frac{2}{5}$ der 500 Blutspender. Damit folgt $P(X \geqslant 1) = \frac{2}{5} \cdot 1 = 0{,}4$.

c) Mit mindestens einer Wahrscheinlichkeit von 0,9 tritt $X \geqslant 1$ dann ein, wenn $P(n,p) = 1 - (1-p)^n \geqslant 0{,}9$ gilt. Wir definieren zunächst die Funktion P im ClassPad unter Main und benutzen hierbei

Math3 Define (Definitionsoperator)

Da die Funktion P mit konstantem p für wachsendes n streng monoton steigend ist (siehe Abbildung des 3-d-Graphen in Teil d)), wird die Lösungsmenge von n für $p = 0{,}05$ der Gleichung $P(X \geqslant 1) = 0{,}9$ bestimmt. Dies lässt sich mithilfe des ClassPad berechnen, indem unter Main Folgendes eingegeben wird:

Math3 Solve abc ⇧ P (x , 0 . 0 5) Math3 ≧ 0 . 9 , x) EXE (Bestimmung der Lösungsmenge der Gleichung $P(X \geqslant 1) = 0{,}9$)

Diese Gleichung ist für $x \geqslant 44{,}89$ erfüllt.

Da $n \in \mathbb{N}$ gilt, ist die Lösung aufzurunden, d. h., dass mindestens 45 Blutspender vorhanden sein müssen, damit mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,9 mindestens eine Person die Blutgruppe AB hat.

Es handelt sich um die Lösungsmenge der Gleichung

$$0{,}9 \leqslant P(X \geqslant 1) = P(n, 0{,}05) = 1 - (1 - 0{,}05)^n = 1 - 0{,}95^n.$$

Man berechnet sie folgendermaßen:

$$\begin{aligned} 1 - (0{,}95)^n &\geqslant 0{,}9 \\ \Leftrightarrow \qquad 0{,}95^n &\leqslant 0{,}1 \\ \Leftrightarrow \quad n \cdot \ln(0{,}95) &\geqslant \ln(0{,}1) \\ \Leftrightarrow \qquad n &\geqslant \frac{\ln(0{,}1)}{\ln(0{,}95)} \end{aligned}$$

Mithilfe der Monotonie der Logarithmusfunktion folgt, dass für einen Umfang von

$$n \geqslant \frac{\ln(0{,}1)}{\ln(0{,}95)} \approx 44{,}89$$

d. h. für $n \geqslant 45$, die Wahrscheinlichkeit $P(X \geqslant 1)$ über 0,9 liegt.

Möchte man mit einer Wahrscheinlichkeit von $a = 0{,}98$ einen Spender der Blutgruppe AB finden, so ist dies für die folgende Lösungsmenge der Fall:

$$(1 - 0{,}05)^n \leqslant 1 - 0{,}98 \Leftrightarrow n \geqslant \frac{\ln(1 - 0{,}98)}{\ln(1 - 0{,}05)} \approx 76{,}27$$

womit $n \geqslant 77$ folgt.

Für das Notieren einer allgemeinen Formel setzen wir für die Wahrscheinlicheit p die Bedingung $0 \leqslant a \leqslant 1$ der Untersuchung $P(X \geqslant 1) \geqslant a$. Die Bedingung ist für $n \geqslant \dfrac{\ln(1-a)}{\ln(1-p)}$ erfüllt.

d) Ein 3-d-Graph kann unter Main gemacht werden, vgl. Abbildung 1:

3d-Graphik (Öffnen der 3-d-Oberfläche)

(Anzeige der Koordinaten des Cursors)

Die Koordinate `zc` gibt den Funktionswert $P(xc, yc)$ an der Stelle (`xc`,`yc`) an (siehe Abbildung 1). Sie muss einen Wert von mindestens 0,9 annehmen. Dies ist auch für `yc=1` der Fall. Die Funktion besitzt scheinbar keine Extremstellen. Dies wird in Aufgabenteil f) untersucht.

Wandert man mit dem Cursor entlang des 3-d-Graphen, so lässt sich erkennen, dass es mehrere Lösungen gibt, wenn man davon ausgeht, dass die Wahrscheinlichkeit p nur näherungsweise korrekt ist. Da die Wahrscheinlichkeit p nach einem Stichprobenergebnis bestimmt wurde, ist davon auszugehen, dass sie nur näherungsweise genau ist. Ein vorteilhafter Stichprobenumfang könnte anders als als im vorliegenden Fall sein, wenn eine andere Voraussetzung für die Wahrscheinlichkeit p gemacht würde.

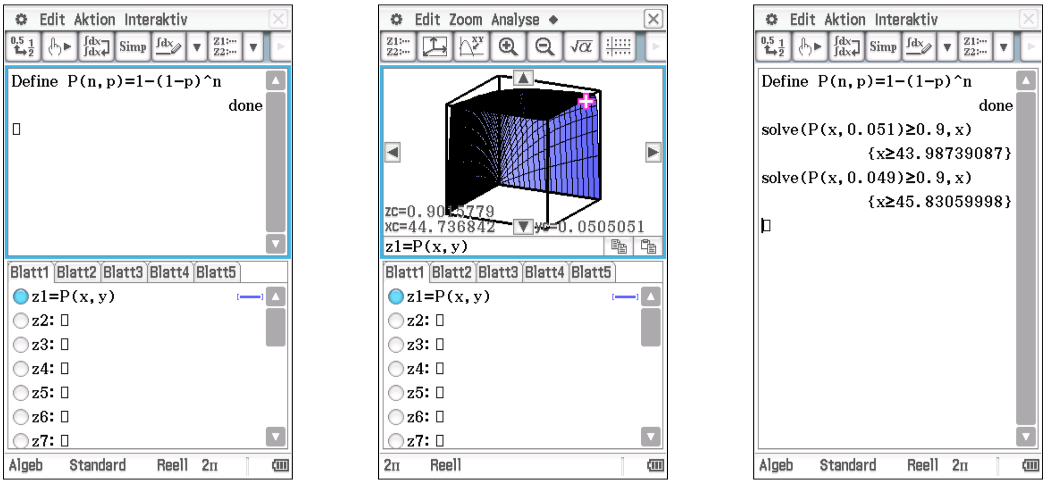

Abbildung 1: Lösung von $P(X \geqslant 1) \geqslant 0{,}9$, 3-d-Graph der Funktion P und Berechnungen der Lösungsmengen von $P(n, p \pm 0{,}001) \geqslant 0{,}9$

e) Die Wahrscheinlichkeit p liegt im Intervall $I = [0{,}05 - 0{,}001; 0{,}05 + 0{,}001] = [0{,}049; 0{,}051]$. Mit dem Cursor kann man die Wahrscheinlichkeit am ClassPad im 3-d-Graphen abschätzen und kommt zu dem Ergebnis $45 \leqslant n \leqslant 50$.

Um die Ungleichung $P(n,p) \geqslant 0{,}9$ bei einem Fehler von 0,001 für p zu erfüllen, muss

$$P(n, p + 0{,}001) \geqslant 0{,}9 \quad \text{und} \quad P(n, p - 0{,}001) \geqslant 0{,}9$$

gelten. Der ClassPad kann die Lösungsmengen der Ungleichungen unter Main angeben, wie es in Abbildung 1 sichtbar ist. Die Werte müssen aufgerundet und der größere Wert gewählt werden; d. h., die Spenderzahl sollte auf 46 erhöht werden, um mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 0,9 einen Spender der Blutgruppe AB zu haben.

Die Funktionsgraphen von $P(n, 0{,}051)$ und $P(n, 0{,}049)$ lassen sich näherungsweise mithilfe von Graphen für fest gewählte Werte für p zeichnen. Dies ist auf der rechten Seite von Abbildung 1 für die Fälle $p = 0{,}051$ und $p = 0{,}049$ zu sehen.

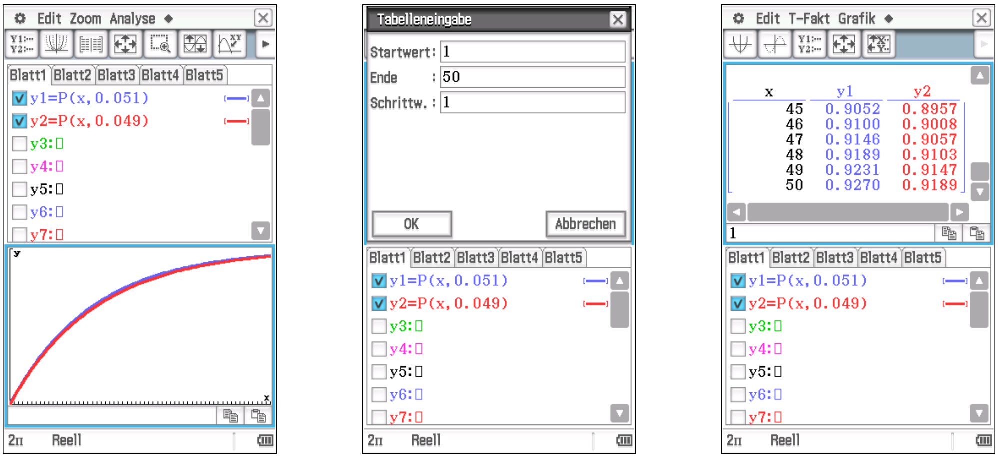

Abbildung 2: Wertetabelle von $P(n, p \pm 0{,}001)$

Es handelt sich um Graphen beider Funktionen, die sehr nahe beieinander liegen. Die Differenzen der Funktionswerte lassen sich an einer Wertetabelle erkennen. Öffnen Sie hierzu . Wählen Sie beispielsweise den Start- bzw. den Endwert der Tabelle bei 40 bzw. 50, da oben bereits eine numerische Lösung für den Umfang von 46 bestimmt wurde. Die Werte unterstützen unser letztes Ergebnis, vgl. Abbildung 2.

f) Wie bereits in der Lösung von Aufgabenteil d) erwähnt, scheinen nur Extremstellen am Rand des Definitionsbereiches zu existieren. Das wollen wir durch Ableitung der Funktion P nach den Variablen n und p untersuchen.

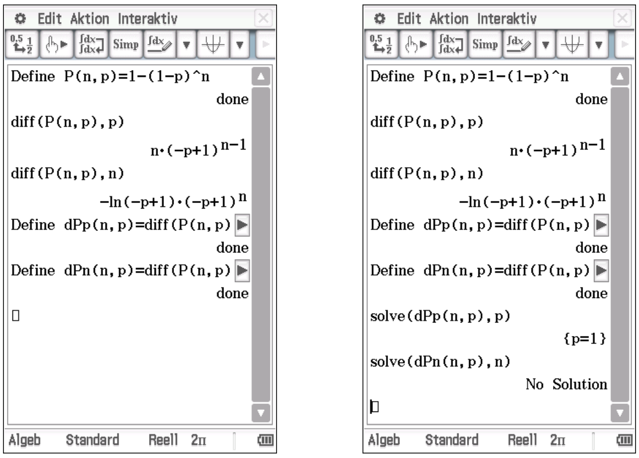

Abbildung 3: Extremstellen der Funktionenschar $P(n, p)$

Um Extremstellen der Funktion P zu bestimmen, bilden wir die Ableitungen der Funktion P nach den Variablen n und p. Dies lässt sich mit

`Action` → `Berechnungen` → `diff` `abc` `⇧` `p` `(` `n` `,` `p` `)` `,` `p` `)` `EXE`

(Ableitung der Funktion P nach p)

und

`Action` → `Berechnungen` → `diff` abc ⇑ p (n , p) , n) EXE

(Ableitung der Funktion P nach n)

machen. Die Ergebnisse sind in Abbildung 3, links, zu sehen.

Die Ableitungen können als Funktionen definiert werden, was in Abbildung 3 zu sehen ist.

Die Extremstellen der Funktion P als Funktion der Variablen p sind berechenbar mit

Math1 Solve (Aufruf des `solve(`-Operators)

Dann können mit `dPp(n,p)` die Nullstelle bzgl. der Variablen p und mit `dPp(n,p)` die Nullstelle bzgl. der Variablen n berechnet werden, vgl. Abbildung 3, rechts.

Wie man in dieser Abbildung sieht, hat die Funktion P in Abhängigkeit von p eine Nullstelle der ersten Ableitung an der Stelle $p = 1$. Diese Nullstelle ist unabhängig von der Variablen n. Für die Variable n existiert hingegen keine Nullstelle der ersten Ableitung nach n. Daher liegen hierfür die Extremstellen an den Rändern des Definitionsbereiches, womit unsere Vermutung aus dem Aufgabenteil d) bestätigt wird.

Im Inneren des Definitionsbereichs liegen keine lokalen Extremstellen der Funktion P vor, da sie für beide Variablen bzgl. beliebiger Konstanten der anderen Variablen streng monoton verläuft. Anschaulich wächst die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses mit steigender Wahrscheinlichkeit p bei konstantem n an.

Die höchste Wahrscheinlichkeit liegt (selbstverständlich) dann vor, wenn die Trefferwahrscheinlichkeit gleich 1 ist. Analog nimmt die Treffsicherheit mit wachsender Spenderzahl zu.

Lösung zu Beispiel 2. a) $p = 0{,}05$ ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine Person die Blutgruppe AB besitzt. Wir betrachten zunächst die Ereignisse, dass die ersten Spender nicht diese Blutgruppe haben. Die Wahrscheinlichkeit, dass der erste Spender die Blutgruppe AB hat, ist gleich $P(X_1) = p$. Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die übrigen $n-1$ Personen nicht die Blutgruppe AB haben, ist gleich $(1-p)^{99}$. Damit folgt

$$P(X = 1|X_1) = p \cdot (1-p)^{99}.$$

Analog gilt $P(X_2) = p$, da die Spender als voneinander unabhängig betrachtet werden können. Hiermit ist die Wahrscheinlichkeit, dass die ersten zwei Spender die Blutgruppe AB haben, gleich $P(X_1) \cdot P(X_2) = p^2$. Die übrigen Spender haben nicht die Blutgruppe AB. Damit folgt

$$P(X = 2|(X_1, X_2)) = p^2 \cdot (1-p)^{98}.$$

Außerdem gilt

$$P(X = 3|(X_1, X_2, X_3)) = p^3 \cdot (1-p)^{97},$$

und allgemein ist für n Personen und $1 \leqslant k \leqslant n$ zufällig gewählte

$$P(X = 1|(X_1, X_2, \ldots, X_k)) = p^k \cdot (1-p)^{n-k}.$$

b) Mit analogen Überlegungen wie in Aufgabenteil a) ergibt sich für die Wahrscheinlichkeiten eines Spenders der Blutgruppe AB

$$P(X = 1|X_1) = P(X = 1|X_2) = \ldots = P(X = 1|X_{100}) = p \cdot (1-p)^{100-1}.$$

Damit folgt

$$P(X = 1) = \sum_{i=1}^{100} P(X = 1|X_i) = 100 \cdot p \cdot (1-p)^{100-1}.$$

Für die Wahrscheinlichkeiten, dass zwei der 100 Spender die Blutgruppe AB haben, gilt

$$\begin{aligned} P(X=2|(X_1,X_2)) &= P(X=2|(X_1,X_3)) = P(X=2|(X_1,X_4)) \\ &= \ldots = p^2 \cdot (1-p)^{98}, \end{aligned}$$

d. h. für alle $i, j \in \{1, \ldots, 100\}$ mit $i \neq j$

$$P(X=2|(X_i,X_j)) = p^2 \cdot (1-p)^{98}.$$

98 Spender haben nicht die Blutgruppe AB und können ohne Beachtung der Reihenfolge auf 100 „Plätze“ verteilt werden. Also existieren $\binom{100}{2}$ unterschiedliche Verteilungen der Spender. Dies führt zum Ergebnis

$$P(X=2) = \binom{100}{2} \cdot p^2 \cdot (1-p)^{98}.$$

Bei drei AB-Spendern von 100 Blutspendern gilt

$$P(X=3) = \binom{100}{3} \cdot p^3 \cdot (1-p)^{97}.$$

Für die Wahrscheinlichkeiten, dass von den 100 Spendern zwei, drei oder vier die Blutgruppe AB haben, ist damit gleich

$$P(X=k) = \binom{100}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{100-k}.$$

Da $\binom{100}{0} = \binom{100}{100} = 1$ gilt, kann dieses Ergebnis auch für $k = 0$ und $k = 100$ verwendet werden. Anstelle von 100 kann jede natürliche Zahl mit $n \geqslant k$ benutzt werden, und damit folgt der allgemeine Fall

$$P(X=k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}.$$

Zur Berechnung der Wahrscheinlichkeiten verwenden wir die im ClassPad vorhandene Operation `binomialPDf`. Unter Main befindet sich die Operation

`Interaktiv` → `Verteilungfunktionen` → `Diskret` → `Diskret` → `Diskret` → `binomialPDf` (Binomialverteilung)

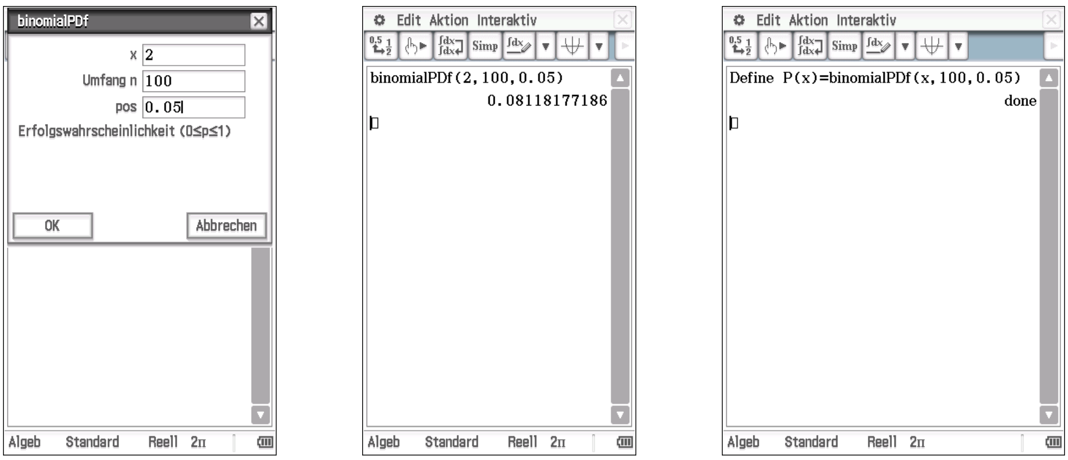

Abbildung 4: Fenster der Operation `binomialPDf` und Funktion P der Binomialverteilung

Die Syntax dieser Funktion P ist

$$\texttt{binomialPDf}(x, n, pos) = \binom{n}{x} \cdot pos^x \cdot (1-pos)^{n-x}.$$

Unsere Bezeichnungen unterscheiden sich zum Teil von den Bezeichnungen im ClassPad. Hier bedeuten

- `x`: Anzahl der Treffer (bei uns k)
- `n`: Umfang der Versuche (bei uns n)
- `pos`: Erfolgswahrscheinlichkeit (bei uns p)

Für den ersten Fall $X = 2$ gilt

$$\texttt{n} = 100, \quad \texttt{x} = 2 \quad \text{und} \quad \texttt{pos} = 0{,}05.$$

Mit dem ClassPad ergibt sich das Ergebnis in der Mitte von Abbildung 4. Insgesamt erhalten wir

$$P(X = 2) \approx 0{,}08, \quad P(X = 3) \approx 0{,}14 \quad \text{und} \quad P(X = 4) \approx 0{,}18.$$

Zur graphischen Darstellung der Verteilung definieren wir eine Funktion $P(x)$, wie in Abbildung 4, rechts, zu sehen ist.

Es soll ein Graph dieser Funktion erstellt werden. Dazu öffnen wir die Tabellenkalkulation und geben in Spalte `A` einen Zähler von 0 bis 50 ein. Außerdem werden in `B1` bis `B51` die Funktionswerte `=P(A1)` bis `=P(A51)` eingegeben, vgl. Abbildung 4.

Der Inhalt der Tabelle soll graphisch dargestellt werden. Dazu wählen wir nach der Markierung der Spalten `A` und `B` in der Kopfzeile `Graph Aktion`; Ergebnis siehe Abbildung 5, rechts. Der maximale Wert liegt im Punkt (5|0,18).

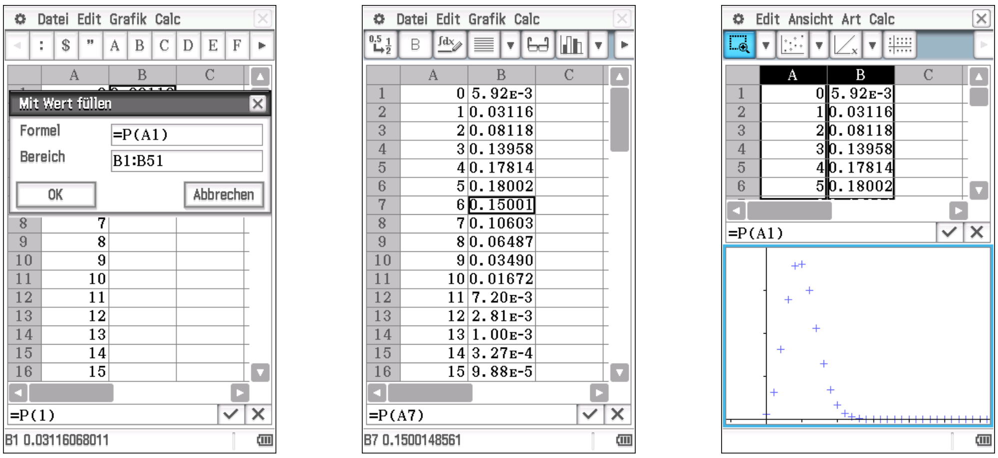

Abbildung 5: Tabelle und Graph zur Funktion P der Binomialverteilung

c) Wir gehen wiederum von $p = 0{,}05$ aus. Es gilt mit $n = 100$

$$\begin{aligned} P(X \geqslant 2) &= 1 - \big(P(X = 0) + P(X = 1)\big) \\ &= 1 - \left(\binom{100}{0} \cdot p^0 \cdot (1-p)^{100} + \binom{100}{1} \cdot p^1 \cdot (1-p)^{99}\right) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} P(X \geqslant 3) &= 1 - \big(P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2)\big) \\ &= 1 - (\binom{100}{0} \cdot p^0 \cdot (1-p)^{100} + \binom{100}{1} \cdot p^1 \cdot (1-p)^{99} \\ &\quad + \binom{100}{2} \cdot p^2 \cdot (1-p)^{98}). \end{aligned}$$

Zur Berechnung der Wahrscheinlichkeiten benutzen wir die Operation

`Interaktiv` → `Verteilung` → `binomialCDf` (kumulierte Binomialverteilung)

des ClassPad. Die Syntax dieser Funktion P ist

$$\texttt{binomialCDf}(u, o, n, p) = \sum_{i=u}^{o} \binom{n}{i} \cdot p^i \cdot (1-p)^{n-i}.$$

Auch hier unterscheiden sich unsere Bezeichnungen zum Teil von den Bezeichnungen im ClassPad. Es bedeuten (s. Abbildung 6, links)

`Untere`:	minimale Trefferzahl (bei uns $u = 0$)
`Obere`:	maximale Trefferzahl (bei uns o)
`Umfang n`:	Umfang der Versuche (bei uns n)
`pos`:	Erfolgswahrscheinlichkeit (bei uns p)

Diese Funktion berechnet mit unseren Notierungen die Wahrscheinlichkeit

$$P(X \leqslant k) = \sum_{i=0}^{k} \binom{100}{k} \cdot p^i \cdot (1-p)^{100-i}.$$

Für den Fall $X \leqslant 2$ ergibt sich

$$P(X \leqslant 2) \approx 0{,}118.$$

Bei der Lösung unserer Aufgabe ist zu bedenken, dass wir die Wahrscheinlichkeit $P(X \geqslant 2)$ berechnen möchten. Es gilt

$$P(X \geqslant 2) = 1 - P(X \leqslant 1).$$

Das Ergebnis mit dem ClassPad ist in Abbildung 6, rechts, zu sehen.

Allgemein gilt für den Fall $X \geqslant k$ die Funktion mit drei Variablen n, k, p:

$$P(X \geqslant k) = 1 - P(X \leqslant k-1) = 1 - \sum_{i=0}^{k-1} \binom{n}{i} \cdot p^i \cdot (1-p)^{n-i}.$$

Wir erhalten das Ergebnis

$$P(X \geqslant 2) \approx 0{,}963,$$

siehe Abbildung 6. Analog erhalten wir

$$P(X \geqslant 3) \approx 0{,}882.$$

d) Da $2\frac{1}{2}$ Liter Blut gespendet werden sollen und jede Person einen halben Liter spenden kann, gilt $n = 20, k = 5$. Damit folgt

$$P(X \geqslant 5) \approx 0{,}003.$$

Gesucht ist die Anzahl n der Spender, so dass $P(X \geqslant 5) = \frac{3}{4}$ gilt. Wir versuchen, diese Gleichung mit dem ClassPad zu lösen.

Es liegt nahe, die Lösung mithilfe der Funktion

```
solve(1-binomialCDf(0,5,n,0.05)=0.75,n)
```

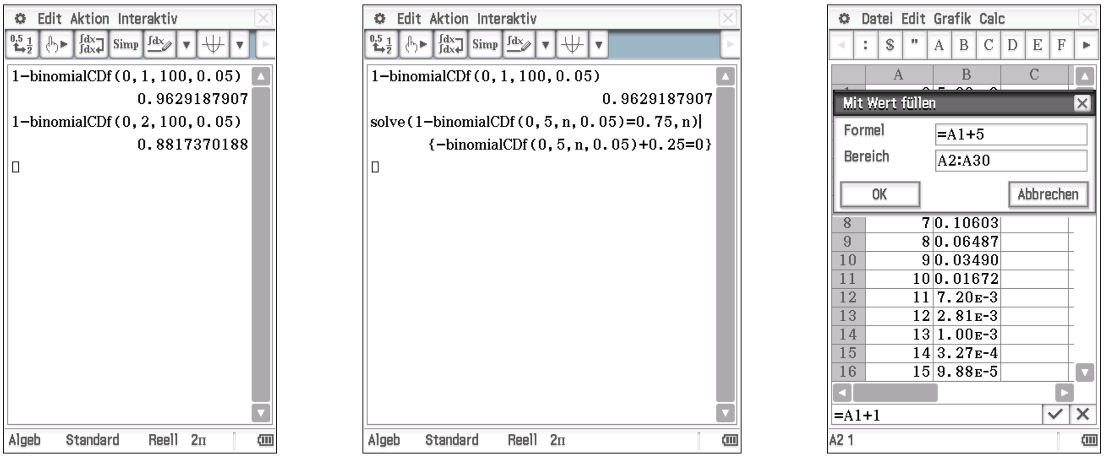

Abbildung 6: Fenster der Operation `binomialCDf` und leere Lösungsmenge

zu bestimmen; es gelingt nicht, siehe Abbildung 6, rechts. Daher wollen wir versuchen, die Lösung näherungsweise mithilfe einer Wertetabelle zu bestimmen. Das ist hier gut machbar, da n eine natürliche Zahl ist.

Wir öffnen Tabellenkalkulation und notieren in der Spalte `A` Zahlen von 5 bis etwa 150 in Schritten von 5. In die Zelle `B1` wird

```
=1-binomialCDf(0,5,A1,0.05)
```

geschrieben. Kopiert man die Berechnungen in die übrigen `B`-Zellen, erhält man das Ergebnis in Abbildung 7, links.

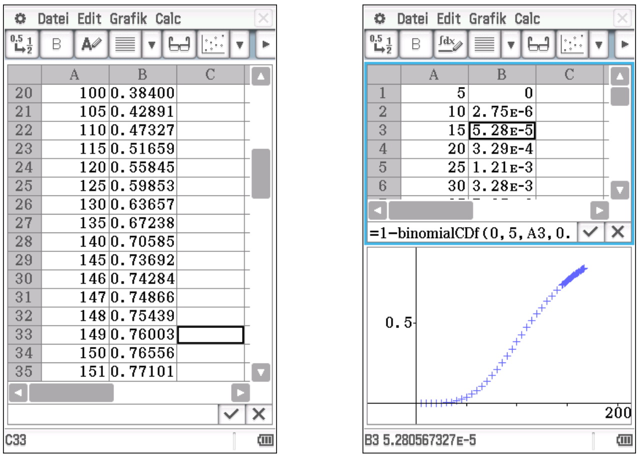

Abbildung 7: Bestimmung des Maximums der Funktion P

Es ist zu erkennen, dass bei $n = 150$ Spendern die Wahrscheinlichkeit für einen Spender der Blutgruppe AB größer als 0,75 ist. Um die Anzahl der Spenter genau zu bestimmen, berechnen wir die Wahrscheinlichkeiten für $146 \leqslant n \leqslant 150$. In Abbildung 7, links, sehen wir, dass die Wahrscheinlichkeit für einen Spender der Blutgruppe AB wirklich für $n \geqslant 148$ größer als 0,75 ist. Die Tabellenwerte lassen sich graphisch darstellen. Dies kann unter gemacht werden, siehe Abbildung 7, rechts.

e) Hier ist nach der Anzahl der Spender k der Blutgruppe AB unter den Bedingungen $p = 0{,}05$ und $n = 100$ gefragt, also nach dem Erwartungswert $\mathbb{E}(Y)$ der Zufallsgröße

Y: „Anzahl der Spender mit Blutgruppe AB“.

Für 100 Spender folgt

$$\mathbb{E}(Y) = \sum_{i=1}^{100} i \cdot P(Y = i) = \sum_{i=1}^{100} i \cdot \binom{100}{i} \cdot 0{,}05^i \cdot 0{,}95^{100-i}.$$

Wir werden den Erwartungswert in der Tabellenkalkulation berechnen. Hierzu definieren wir zunächst unter Main die Funktion (vgl. Abbildung 8)

$$P(k, n, p) = \sum_{i=0}^{k-1} \binom{n}{i} \cdot p^i \cdot (1-p)^{n-i}.$$

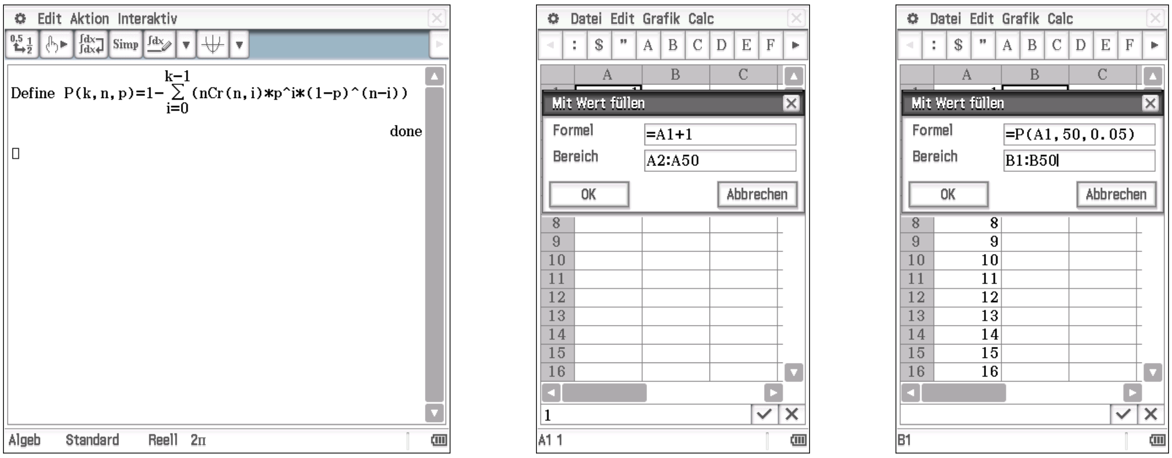

Abbildung 8: Wahrscheinlichkeitsfunktion P der AB-Spender

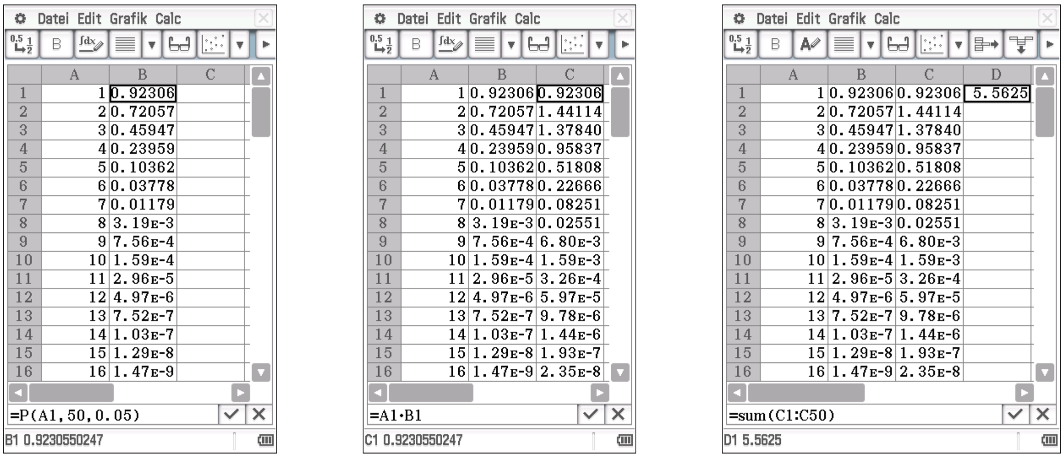

Abbildung 9: Näherung des Erwartungswertes der AB-Spender P

Nun wechseln wir zu Tabellenkalkulation . Nachdem wir, wie rechts in Abbildung 8 sichtbar, in Spalte `A` den Zähler der Spender von 1 bis 50 eingetragen haben, notieren wir `=P(A1,50,0.05)` in Spalte `B`, vgl. Abbildung 9.

Die Berechnung wird in die Zellen `B2` bis `B50` kopiert. Zelle `C1` wird mit `=A1·B1` gefüllt und dann in die Zellen `C2` bis `C50` kopiert. In Spalte `C` stehen damit die Werte $i \cdot P(Y = i)$. Um den Erwartungswert zu berechnen, sind diese Werte zu addieren. Hierzu geben wir in Zelle `D1`

`Calc` → `Liste-Berechnen` → `sum` [C] [1] [:] [C] [5] [0] [)] [EXE]

(vgl. Abbildung 9). Das Ergebnis lautet 5,562. Es sind also fünf AB-Spender zu erwarten.

Die Zahl muss in jedem Fall abgerundet werden, da für die Zahl $k \in \mathbb{N}$ der Spender mit Blutgruppe AB $k \leqslant \mathbb{E}(Y)$ gilt.